MEMORIA

SOPRA I CINQUE

POLIEDRI REGOLARI

DI

TOMMASO MANDOJ

NAPOLI,

DA' TORCHJ DI RAFFAELLO DI NAPOLI.

1826.

P R E F A Z I O N E

Tutti gli elementi di Geometria parlano de' cinque Poliedri regolari, ma rari sono quelli che insegnano in che maniera si debbono calcolare le superficie, ed i volumi di essi. Ciò dipende perchè la teoria delli Poliedri regolari riesce alquanto difficoltosa volendola trattare colla sola Geometria, ed oltre di ciò interrompe ancora l' ordine delle proposizioni. Quindi è che ordinariamente le geometrie si limitano solo in dimostrare l' esistenza di questi Poliedri, senza parlarne affatto della loro misura. Intanto mancando a' giovani un trattato della misura di questi Poliedri, debbono essi trovarsi con ragione imbarazzati nel voler determinare le capacità, e le superficie de' medesimi. A tale oggetto io ho scritto questa piccola memoria sopra i cinque Poliedri regolari *nella quale ho esposto quanto ho creduto necessario per la misura di ciascuno di essi Poliedri.*

Ho cercato di esporre il tutto colla massima chiarezza e semplicità, affinchè i giovani non abbiano altro a desiderare intorno alla misura di questi Poliedri.

MEMORIA

SOPRA I CINQUE

POLIEDRI REGOLARI

TEOREMA I.

Tutti gli angoli piani, che compongono un angolo Poliedro presi insieme sono sempre minori di quattro retti.

Dimostr. 1. Sia l' angolo Poliedro composto da n angoli piani. Da un punto qualunque preso in uno spigolo si meni un piano in modo da incontrare tutti gli altri spigoli. Si avrà in questo modo una piramide, la base della quale sarà di n lati, e terminata a torno a torno da n triangoli. Ora essendo i tre angoli di un triangolo eguali a due retti, nè segue che tutti gli angoli degli n triangoli equivaleranno ad $n.180^\circ$. Dippiù la base della piramide essendo un poligono di n lati, tutti i suoi angoli valeranno $180^\circ(n-2)$. Ora essendo due angoli alla base de' triangoli adjacenti allo stesso spigolo sempre maggiori dell' angolo corrispondente della base della piramide; ne segue che tutti gli angoli alla base de' triangoli sono maggiori di tutti gli angoli della

base della piramide, ossia maggiori di $180°(n-2)$. Quindi chiamando B, la somma degli angoli alla base di tutti i triangoli, e V quella di tutti gli angoli al vertice, ossia di tutti gli angoli che compongono l' angolo Poliedro, avremo $B > 180°(n-2)$; ma $B+V = n.180°$, ossia $B = n.180° - V$; dunque sarà ancora $n.180° - V > 180°(n-2)$, ovvero... $n.180° > n.180° - 360° + V$, e quindi sarà $360° > V$. Dunque tutti gli angoli verticali, ossia tutti gli angoli che compongono l' angolo Poliedro sono sempre minori di quattro retti C. B. D.

2. Quindi essendo un angolo di un triangolo equilatero $\frac{2}{3}$ di retto, tre di essi saranno eguali a due retti, ossia a 180°, quattro a $\frac{8}{3}$ di retto, ossia a 240°, cinque a $\frac{10}{3}$ di retto ovvero a 300°, sei a $\frac{12}{3}$, ossia a 360°. Onde possiamo comporre un angolo Poliedro con 3, 4, o 5 angoli di triangolo equilatero, e non più, da poicchè con sei si avrebbero 360°, cioè quattro retti, il che è assurdo.

Prendendo gli angoli del quadrato, è chiaro che solo con 3 di questi angoli possiamo formare un angolo Poliedro. Se si prendono gli angoli del pentagono regolare, siccome ogni an-

golo di questo poligono equivale a $\frac{6}{5}$ di retto, così tre di essi saranno $\frac{18}{5}$, ossia 324°, e quattro $\frac{24}{5}$, ovvero 432°. Onde solo con tre di questi angoli possiamo formare un angolo Poliedro.

L' angolo dell' esagono regolare valendo $\frac{4}{3}$ di retto, tre di essi valeranno quattro retti, dunque è impossibile formare un angolo Poliedro con angoli dell' esagono regolare.

Combinando dunque gli angoli de' poligoni regolari per formare un angolo Poliedro, noi possiamo avere solamente cinque differenti angoli Poliedri, cioè il primo cambinando 3 angoli di triangolo equilatero, il secondo combinandone 4, il terzo combinandone 3 di quadrato, il quarto combinandone 5 di triangolo equilatero, ed il quinto combinandone 3 di pentagono regolare.

Quindi siccome si chiamano Poliedri regolari quelli Poliedri che hanno tutte le facce poligoni regolari eguali, e tutti gli angoli Poliedri eguali, così ne segue che i Poliedri regolari non possono essere più di cinque.

Il primo si chiama *Tetraedro*, ed è composto da quattro triangoli equilateri, il secondo si chiama *Ottaedro*, ed è composto da 8 triangoli equilateri, il terzo è l'*Essaedro*, o *Cubo*, ed è composto da sei quadrati, il quarto si chiama *Icosaedro*, e vien formato da 20 triangoli equilateri, ed il quinto si chiama *Dodecaedro* e si compone da 12 pentagoni regolari. Noi ne daremo la formazione prattica di ciascuno di questi Poliedri.

Formazione de' Poliedri regolari

I.° *del Tetraedro.*

3. Volendo col cartone o altra materia analoga costruire il Tetraedro, si potrà agire nel seguente modo.

(Fig. 1.) Si formi il triangolo equilatero ABC, e sopra de' lati AB, BC, CA, si formino i triangoli equilateri ABE, ACD, BCF. Indi piegando il cartone secondo le rette AB, BC, CA, e riunendo in un punto i punti D, E, F, si avrà il Tetraedro T.

II.° *Dell' Ottaedro.*

(Fig. 3.) 4. Per costruire l'Ottaedro si descriva il triangolo equilatero DEF come si è fatto nel Tetraedro, e poi si prolunghi BF fino a G, in modo che FG sia eguale a BF, e

fatto sopra di BG, il triangolo equilatero BKG, si spieghi il cartone in tutti i lati de' otto triangoli, e si avrà l' Ottaedro O.

III.° *Del Cubo.*

(Fig. 2.) 5. Si formi il quadrato ABCD, e sopra i lati AB, BC, CD, DA, si formino i quadrati E, G, H, F, come ancora sopra il lato MN del quadrato H, si costruisca il quadrato I. Indi piegando il cartone secondo le rette AB, BC, CD, DA, MN, si avrà il Cubo cercato C.

IV. *Dell' Icosaedro.*

(Fig. 4.) 6. Per formare l' Icosaedro si formi un triangolo equilatero ABC, si prolunghino i lati AB, BC, verso D, e verso F, in modo che sia AD=AB, e CF=4BC. Pel punto A si meni AG, parallela ed eguale a BF, si tagli AG in cinque parti eguali ne' punti 1, 2, 3, 4, e si tagli CF in quattro parti eguali ne' punti p, q, r. Dippiù si tirino le rette 1p, 2q, 3r, 4F, e si formino sopra le parti A,1; 1,2; 3,4; 4G, BC, Cp, pq, qr, ed rF, tanti triangoli equilateri. Si pieghi finalmente il cartone in tutti i lati de' triangoli, e si avrà così l' Icosaedro cercato I.

so le perpendicolari PO, QO alle rette PD, QD, e si unisca il punto di concorso O col punto D colla retta OD, che sarà perpendicolare alla MD. Ora essendo le facce di un Poliedro regolare tutte eguali, ed essendo P, e Q i centri di esse, sarà l'apotema PD, eguale all'altro DQ. Quindi i due triangoli rettangoli OPD, OQD; avendo i due lati PD, DO eguali a' due lati QD, DO, essi saranno eguali, e sarà l'angolo PDO eguale all' angolo ODQ. Quindi la retta OD divide l'angolo ODQ, d'inclinazione delle facce in due parti eguali. In oltre i triangoli rettangoli OPD, ODM, PDM, ci danno le seguenti eguaglianze $\overline{PO}^2+\overline{DP}^2=\overline{OD}^2$

$$\overline{OD}^2+\overline{MD}^2=\overline{OM}^2$$
$$\overline{PM}^2-\overline{PD}^2=\overline{MD}^2$$

dalle quali addizionando si ha $\overline{PO}^2+\overline{PM}^2=\overline{OM}^2$ Dunque il triangolo OPM, sarà rettangolo, e perciò OP sarà perpendicolare alla PM; ma OP è anche perpendicolare a PD, dunque OP è perpendicolare alle due PM, PD, che s' incontrano al suo piede, e perciò sarà perpendicolare al piano PDM, ossia alla faccia del Poliedro. Similmente si dimostra che OQ è perpendicolare all' altra faccia del Poliedro. In oltre essendo l' apotema PD, sempre dell' istessa lunghezza in tutte le facce del Poliedro regolare, sarà perciò costante. Dippiù l' angolo PDQ, essendo costante la sua metà PDO, sarà egualmente costante, e l' angolo OPD, essendo

retto sarà perciò costante, dunque il lato OP, sarà anche costante, ossia sempre dell' istessa lunghezza. Quindi se col centro O, e col raggio OP, si descriva una sfera, questa sarà tangente a tutte le facce del Poliedro, giacchè ogni faccia è perpendicolare all' estremità del raggio. Dunque la sfera sarà iscritta nel Poliedro, o vice versa il Poliedro sarà circoscritto alla sfera.

Dippiù si unisca OM, ed ON. Essendo MD =DN, ed essendo DO, perpendicolare ad MN, sarà MO=ON. Similmente si dimostra, che tutte le altre rette tirate dal punto O, all' estremità degli altri spigoli sono eguali, e perciò tutte queste rette sono eguali tra loro. Quindi se col centro O, e col raggio OM, si descriva una sfera, questa passerà per tutti i vertici degli angoli del Poliedro, e perciò la sfera sarà circoscritta al Poliedro. Dunque è vero, che ad un Poliedro regolare si può sempre iscrivere e circoscrivere una sfera C. B. D.

10 Ne segue da quanto si è detto nella precedente dimostrazione.

I.° Che il raggio della sfera iscritta è perpendicolare ad ogni faccia del Poliedro nel centro del cerchio iscritto o circoscritto.

II.° Che il raggio del cerchio inscritto ad una faccia, quello della sfera iscritta nel Poliedro sono i due cateti di un triangolo rettangolo l' ipotenusa del quale è il raggio della sfera circoscritta al detto Poliedro.

III.° Che se si formi un triangolo rettangolo, tale che abbia un angolo acuto eguale alla metà dell' angolo d' inclinazione di due piani contigui del Poliedro, e per lo cateto adjacente il raggio del cerchio iscritto ad una faccia del Poliedro, sarà l' altro cateto il raggio della sfera iscritta.

11. Prima di vedere in qual maniera si debba determinare la superficie, ed il volume de' Poliedri regolari, è necessario premettere lo scioglimento di alcuni problemi, da' quali dipende la misura de' medesimi. Sia dunque

---

PROBLEMA I.°

Dato il lato di un poligono regolare trovare, il raggio del cerchio iscritto, del cerchio circoscritto, e l'aja del medesimo.

12 (Fig. 7). *Soluz.* Sia AB, un lato del poligono regolare, trovare il raggio del cerchio iscritto', del cerchio circoscritto, e l'aja del medesimo.

Sia n il numero de' lati, e sia C il centro di esso, ossia del cerchio iscritto, o circoscritto al poligono. Si abbassi sopra di AB la perpendicolare CD, che sarà il raggio del cerchio iscritto, e che dividerà il lato AB, egualmente in D. Si unisca la retta CA, e la retta CB. Ciò fatto, se dal centro C, si tirino a gli n angoli del poligono delle rette, queste divideranno il poligono in n triangoli tutti eguali ad ACB, ciascuno de' quali avrà l' angolo al vertice C, eguale all' angolo ACB; ma tutti gli angoli che si possono formare attorno al punto C equivalgono 360°, dunque l'angolo ACB, sarà di $\frac{360°}{n}$, e quindi l' angolo ACD, sarà di $\frac{180°}{n}$, Ora nel triangolo rettangolo ACD, si ha la seguente proporzione AD : DC : : 1 :

cot. ACD, ossia $\frac{1}{2}$ AB : DC : : 1 : cot. $\frac{180°}{n}$
e quindi chiamando L il lato AB, e facendo
$\frac{180°}{n}=b$, si avrà DC $=\frac{1}{2}$L cot. b.

Dippiù il medesimo triangolo ci da AC: $\frac{1}{2}$L: : 1 : sen. b, e perciò sarà AC$=\frac{L}{2\,\text{sen.}b}$.
Finalmente essendo l'aja del triangolo ACB
$=$CD$\times\frac{1}{2}$ AB, sarà perciò eguale ad $\frac{L\,\text{cot.}b}{2}\times\frac{1}{2}L$
$=\frac{L^2\,\text{cot.}\,b}{4}$; ma tutto il poligono è composto
da n triangoli eguali ad ACB, dunque tutta
l'aja del poligono sarà espressa da $\frac{nL^2\,\text{cot.}b}{4}$.
Onde chiamando R' il raggio del cerchio circoscritto, r' quello dell' iscritto, ed A, l'aja, si avranno le seguenti formole generali
$r' =\frac{L\,\text{cot.}b}{2}$, R' $=\frac{L}{2\text{sen.}b}$, ed A$=\frac{nL^2\,\text{cot.}\,b}{4}$.

PROBLEMA II.°

Trovare i seni, e coseni degli archi di 60.°, 45.°, e 36.°

13. *Soluz.* Sia 1 il raggio delle tavole, sarà $\sqrt{3}$ il lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio che tiene per raggio 1. Ora siccome il lato del triangolo equilatero iscritto è la corda dell'arco di 120.°, così sarà $\sqrt{3}$ la corda di 120.°; ma il seno di un arco è la metà della corda del doppio arco, dunque il seno di 60.° sarà la metà della corda di 120.°, ossia che sarà $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dippiù il quadrato del coseno è eguale al quadrato del raggio meno il quadrato del seno, dunque sarà il quadrato del coseno eguale ad $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, e perciò il coseno di 60° sarà $\frac{1}{2}$.

In oltre essendo il raggio 1, sarà $\sqrt{2}$, il lato del quadrato iscritto nel cerchio; ma il lato del quadrato iscritto è la corda di 90.°, perciò la sua metà sarà il seno di 45.° Quindi il seno di 45.° sarà $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, ed il coseno

in consegnenza sarà ancora $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Finalmente essendo il lato del decagono regolare iscritto in un cerchio la parte maggiore del raggio qualora si divide in estrema e media ragione, ed essendo il raggio 1, sarà perciò il lato del decagono regolare iscritto $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ora siccome il quadrato fatto sul lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio è eguale alla somma del quadrato del raggio, e del quadrato fatto sul lato del decagono regolare iscritto, così essendo il raggio 1, ed essendo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ il lato del decagono regolare iscritto, sarà perciò $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$, il lato del pentagono regolare iscritto; ma il lato del pentagono regolare iscritto è la corda dell' arco $72°$, dunque la sua metà sarà il seno di $36.°$ Onde il seno di $36.°$ sarà $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, ed il coseno sarà per conseguenza $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ C. B. T.

PROBLEMA III.°

Dato un Poliedro regolare, trovare l' angolo diedro di due facce contigue.

Soluz. Sia MN (fig. 6) lo spigolo comune alle due facce contigue, e sieno P, e Q i centri di esse. S' intenda fatta la medesima costruzione del teorema precedente, e col centro O, e col raggio eguale a quello delle tavole si descriva una sfera che incontri i lati PO, MO, DO, ne' punti s, r, t; si avrà il triangolo sferico s r t, rettangolo in t. Ora l'angolo s è eguale a quello fatto dalle due tangenti tirate dal punto s, agli archi sr, st, le quali perchè perpendicolari al lato PO, saranno parallele rispettivamente, alle rette PM, PD, e quindi l' angolo compreso da queste due tangenti sarà eguale all' angolo DPM, e perciò eguale a $\frac{180.°}{n}$ (prob. 1.). Dippiù essendo M il vertice dell'angolo Poliedro, è chiaro che se per N, e per tutte le altre estremità degli spigoli si meni un piano, si avrà un poligono regolare di tanti lati quanti sono gli angoli piani, che compongono l'angolo Poliedro M; sia *m* il numero di questi angoli. Ora è chiaro che il raggio OM della sfera circoscritta al Poliedro sarà perpendicolare al piano di siffatto poligono regolare. Quindi se dal punto in cui il raggio

OM, incontra il piano di questo poligono, si tirino due rette, una al punto medio del lato di esso poligono che corrisponde alla faccia che ha il punto P, per centro, e l' altra al punto N, dello spigolo MN, è chiaro che la prima di queste rette sarà nel piano MOP, e la seconda nel piano DMO, e siccome sono perpendicolari alla retta OM, così saranno parallele alle tangenti tirate dal punto r, agli archi r s, r t, e quindi l'angolo compreso da queste rette sarà eguale all' angolo compreso dalle due tangenti; ma il primo di questi angoli è eguale a $\frac{180.^\circ}{m}$ (prob. 1.°) dunque il secondo ossia l'angolo r, sarà ancora eguale a $\frac{180.^\circ}{m}$. Onde nel triangolo sferico rettangolo in t, conoscendo i tre angoli si avrà la seguente proporzione. seno. s : coseno. r : : 1 : coseno. ts, dalla quale si ricava cos. ts $= \frac{\text{cos.r}}{\text{sen.s}}$; ma cos.ts è eguale a cos. POD, ossia a sen. PDO, dunque sarà

$$\text{sen. PDO} = \frac{\cos.r}{\text{sen.}s} = \frac{\cos.\dfrac{180.^{\circ}}{m}}{\text{sen.}\dfrac{180.^{\circ}}{n}}$$; e chiamando D,

l' angolo diedro PDQ, delle due facce, si

avrà $\text{sen.}\frac{1}{2}D = \frac{\cos.\dfrac{180.^{\circ}}{m}}{\text{sen.}\dfrac{180.^{\circ}}{n}}$, e facendo $\frac{180.^{\circ}}{m} = a$,

si avrà $\text{sen.}\frac{1}{2}D = \frac{\cos.a}{\text{sen.}b}$, C. B. T.

PROBLEMA IV.

Dato il lato del Poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta, e della sfera circoscritta.

15. *Soluz.* Sia MN=L (fig. 6.) il lato del Poliedro regolare dato. Essendo PDQ, l'angolo diedro delle due facce contigue allo spigolo o ato MN, si avrà (prob. III.) $\text{sen.}\frac{1}{2}D=\frac{\cos.a}{\text{sen.}b}$,

e quindi $\text{tang.}\frac{1}{2}D=\frac{\cos.a}{\sqrt{\text{sen}^2.b-\cos^2.a}}=\ldots\ldots$

$$\frac{\cos.a}{\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Ora nel triangolo rettangolo OPD, si ha

$DP : PO :: 1 : \text{tang.}\frac{1}{2}D$, ed essendo PD $=\frac{L\cot.b}{2}$ (prob. I.), e $\text{tang.}\frac{1}{2}D=\ldots\ldots$

$\frac{\cos.a}{\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}$, sarà PO=........

$$\frac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}$$. Dippiù il triangolo rettangolo OPM, ci dà $OM^2=OP^2+PM^2$, onde essendo $PM=\frac{L}{2\text{sen}.b}$ (prob. 1), ed $OP=\frac{L\cos.a.\cot.b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$, saràOM, raggio della sfera circoscritta, eguale ad $\frac{L\,\text{sen}.a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$......$(b)$

Ciocchè bisognava trovare.

PROBLEMA. V.

Dato il lato del Poliedro regolare, trovare la superficie, ed il volume di esso.

16. *Soluz.* Sia p il numero delle facce del Poliedro ed n il numero de' lati di ciascuna faccia. Sarà $\frac{nL^2 \cot. b}{4}$, l'aja d'una faccia, e quindi sarà $\frac{npL^2 \cot. b}{4}$, la superficie del Poliedro. Dippiù se dal centro della sfera circoscritta si tirino agli angoli di tutte le facce de' raggi, si verrà a dividere il Poliedro in tante piramidi per quante sono le facce di esso, ossia in p piramidi, che avranno per altezza il raggio della sfera iscritta. Quindi il volume di una di esse si avrà moltiplicando l'aja di una faccia per la terza parte del raggio della sfera iscritta. Ora essendo l'aja di una faccia $\frac{nL^2 \cot. b}{4}$, ed essendo

il raggio della sfera iscritta $= \dfrac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$,

sarà il volume di una delle sopradette piramidi eguale ad $\dfrac{nL^2\cot.b}{4} \times \dfrac{L\cos.a\cot.b}{6\sqrt{-\cos(a+b)\cos.(a-b)}}$

$= \dfrac{nL^3\cos.a\cot.^2b}{24\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$, e quindi tutte le p, piramidi, osssia l' intiero Poliedro sarà

$\dfrac{pn\,L^3\cos.a\cot.b}{24\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$. Ciocchè bisogna trovare.

Quindi chiamando R'' il raggio della sfera circoscritta al Poliedro, r'' quello dell' iscritta, S la superficie di esso, V il volume, e D, l' angolo diedro di due facce contigue, si avranno le seguenti equazioni.

$\dfrac{180^\circ}{m} = a$, $\dfrac{180^\circ}{n} = b$ Sen$\dfrac{1}{2}$D$= \dfrac{\cos.a}{\text{sen}.b}$, :......:...

$$\tang.\frac{1}{2}D=\frac{\cos.a}{\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}},\quad R'=\frac{L}{2\sen.b}$$

$$r'=\frac{L\cot.b}{2},\quad R''=\frac{L\sen.a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}},$$

$$r''=\frac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}},\quad S=\frac{pnL^2\cot.b}{4}$$

$$V=\frac{pnL^3\cos.a\cot^2b}{24\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}},\quad A=\frac{nL^2\cot.b}{4}.$$

17 Applicando ciascuna di queste formule successivamente a tutti i Poliedri, avremo.

	TETRAEDRO	CUBO
$m =$	3	3
$n =$	3	4
$p =$	4	6
$a =$	60°	60°
$b =$	60°	45°
$R'' =$	$\frac{1}{4} L\sqrt{6}$	$\frac{1}{2} L\sqrt{3}$
$r'' =$	$\frac{L}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2} L$
$S =$	$L^2\sqrt{3}$	$6L^2$
$V =$	$\frac{L^3}{6\sqrt{2}}$	L^3
$\text{Sen.}\frac{1}{2}D=$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$L =$	$\sqrt{\frac{2D'^2}{3}}$	$\frac{D'}{\sqrt{3}}$

Ottaedro	Icosaedro	Dodecaedro
4	5	3
3	3	5
8	20	12
45°	36°	60°
60°	60°	36°
$\frac{1}{2}L\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}L\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}L(\sqrt{3}+\sqrt{15})$
$\frac{L}{\sqrt{6}}$	$\frac{L(3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{12}$	$\frac{L}{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}$
$2L^2\sqrt{3}$	$5L^2\sqrt{3}$	$3L^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$\frac{L^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{5L^3(3+\sqrt{5})}{12}$	$\frac{1}{4}L^3(15+7\sqrt{5})$
$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$\frac{2\cos.36^\circ}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\,\mathrm{sen}.36^\circ}$
$\sqrt{\frac{1}{2}D'^2}$	$D'\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}$	$\frac{2D'}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$

Dinotando con D' il diametro della sfera circoscritta.

18. Da queste formule si vede chiaramente 1.° Che il lato del Cubo, ed il lato del Tetraedro sono i due cateti d' un triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa il diametro della sfera circoscritta 2.° Che il lato del Dodecaedro è la parte maggiore del lato del Cubo, allorchè si divide in estrema e media ragione. In fatti essendo a una retta, sarà $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{2a}{1+\sqrt{5}}$, la parte maggiore di essa qualora si divide in estrema e media ragione; quindi mettendo per a il volore del lato del Cubo, cioè $\frac{D'}{\sqrt{3}}$, si avrà $\frac{2D'}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$, ch'è il lato del Dodecaedro. 3.° Che la metà dell' angolo diedro di due facce contigue del Tetraedro, è il complemento della metà di quello dell'Ottaedro, e quindi l'intiero angolo diedro di due facce contigue del Tetraedro è il supplemento di quello di due facce contigue dell' Ottaedro

Applicando i logaritmi alle formule della superficie, e del volume di ciascun Poliedro, avremo

Tetraedro... $\begin{cases} \log. S = 2 \log. L + 0{,}2385605 \\ \log. V = 3 \log. L - 0{,}9286652 \end{cases}$

Cubo......... $\begin{cases} \log. S = 2 \log. L + 0{,}7781513 \\ \log. V = 3 \log. L \end{cases}$

Ottaedro..... $\begin{cases} \log. S = 2 \log. L + 0{,}5395905 \\ \log. V = 3 \log. L - 0{,}3266052 \end{cases}$

Icosaedro.... $\begin{cases} \log. S = 2 \log. L + 0{,}9375307 \\ \text{lag}. V = 3 \log. L + 0{,}3387940 \end{cases}$

Dodecaedro.. $\begin{cases} \log. S = 2 \log. L + 1{,}3148303 \\ \log. V = 3 \log. L + 0{,}8844056 \end{cases}$

20. Dopo di aver determinato per mezzo del calcolo il raggio della sfera circoscritta, l'angolo diedro di due facce contigue di un Poliedro, ed il raggio della sfera iscritta, vediamo ora in che maniera possiamo determinare tutte queste parti graficamente. Sia dunque.

PROBLEMA VI.°

Dato il raggio della sfera circoscritta, trovare graficamente i lati de' Poliedri regolari.

(Fig. 8). 21. *Soluz.* Sia AB il diametro della sfera circoscritta. Si descriva sopra di esso il semicerchio ACB, e si tagli $BN = \frac{1}{3} AB$ Si alzi AL perpendicolarmente sopra di AB, e si faccia $AL = AB$, si uniscano le due LO, ed AD. Da O, ed N, si alzino le perpendicolari OC, NE, e si uniscano le rette AC, AE, BE. Dippiù si prolunghi AE verso P, e si faccia $EP = \frac{1}{2} EB$. Si unisca PB, e si tagli $PS = PE$. Finalmente si adatti la corda $BI = BS$. Io dico che AE è il lato del Tetraedro, BE del Cubo, AC dell' Ottaedro, AD dell' Icosaedro, e BI del Dodecaedro.

Dimost. Essendo $AN = \frac{2}{3} AB$, sarà $AE^2 =$

$\frac{2}{3}AB^2$, e quindi $AE=\sqrt{\frac{2}{3}AB^2}$; ma AB è il diametro della sfera circoscritta, dunque AE è il lato del Tetraedro. Dippiù essendo il il triangolo AEB, rettangolo in E, ed essendo AE il lato del Tetraedro, sarà BE, il lato del Cubo (§. 17), oltre di ciò si ha $BE=\sqrt{\frac{1}{3}AB^2}$, quindi BE è il lato del Cubo (§. 17) In oltre essendo $AO=OC$, sarà $AC=\sqrt{2AO^2}=\sqrt{\frac{1}{2}AB^2}$, e perciò AC, è eguale al lato dell' Ottaedro. Dippiù essendo $AL=2AO$, sarà $DM=2MO$, poichè i triangoli LAO, DMO, sono simili; ma $DM^2+MO^2=DO^2$, dunque sarà $4MO^2+MO^2=DO^2=\frac{1}{4}AB^2$, e quindi $MO=\sqrt{\frac{1}{20}AB^2}$, e $DM=\sqrt{\frac{1}{5}AB^2}$. Ora essendo $AM=AO-MO$, sarà $AM=\frac{1}{2}AB-\sqrt{\frac{1}{20}AB^2}$ e sarà quindi $AM^2=\frac{1}{4}AB^2-AB\sqrt{\frac{1}{20}AB^2}+$

$$\frac{1}{20}AB^2=\frac{6}{20}AB^2-AB\sqrt{\frac{1}{20}AB^2}$$; ma $AM^2+MD^2=AD^2$, dunque sostituendo in luogo di AM^2, ed MD^2, i valori trovati, avremo $AD^2=$

$$\frac{1}{2}AB^2-AB\sqrt{\frac{1}{20}AB^2}=\frac{1}{2}AB^2-AB^2\sqrt{\frac{1}{20}}$$

$$=AB^2\frac{(10-\sqrt{20})}{20}=AB^2\frac{(5-\sqrt{5})}{10}=\frac{2AB^2}{5+\sqrt{5}},$$

e quindi sarà $AD=AB\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}$, e dunque AD è il lato dell' Icosaedro (§. 17.). Finalmente essendo $EP=\frac{1}{2}EB$, ed $EP=PS$, sarà BS, la parte maggiore della retta BE, divisa in estrema e media ragione; ma $BE=\frac{AD}{\sqrt{3}}$, dunque sarà $BS=BI=\frac{2AB}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$, e perciò sarà BI, il lato del Dodecaedro (§. 17.) C. B. D.

PROBLEMA VII.

Determinare graficamente l' angolo diedro di due facce contigue di un Poliedro regolare.

22. *Soluz.* Si prenda ad arbitrio la retta AB (Fig. 8.), e si faccia la medesima costruzione del prob. precedente, e poi col centro B, e col raggio BI, si descriva un arco, che tagli la EN, nel punto Z. Io dico, che sarà l' angolo BAE, la metà dell'angolo diedro del Tetraedro; l' angolo BAC, la metà di quello del Cubo, l' angolo ABE, la metà di quello dell' Ottaedro, l' angolo BZN, la metà di quello dell' Icosaedro, e finalmente l' angolo BAD, la metà di quello del Dodecaedro.

Dimost. Nel triangolo AEB, rettangolo in E, si ha AB : BE : : 1 : sen. BAE, e quindi sarà sen. $BAE = \frac{BE}{AB}$; ma $BE = AB\sqrt{\frac{1}{3}}$ (§. 21), dunque sarà sen. $BAE = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, e perciò eguale alla metà dell' angolo diedro di due facce contigue del Tetraedro Dippiù essendo $AO = OC$, sarà l' angolo

BAC=45°, e quindi sen. BAC$=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dunque l' angolo BAC, sarà la metà dell' angolo diedro di due facce contigue del Cubo (§. 17.).

In oltre nel triangolo ABE, si ha AB : AE : : 1 : sen. ABE, quindi sarà sen. ABE$=\frac{AE}{AB}$; ma AE=AB$\sqrt{\frac{2}{3}}$, onde sarà

sen. ABE$=\sqrt{\frac{2}{3}}$, dunque l'angolo ABE è la metà dell' angolo diedro dell'Ottaedro (§. 17.).

Nel triangolo BZN, si ha BZ : BN : : 1 : sen. BZN. e quindi sarà sen. BZN$=\frac{BN}{BZ}$;

ma BN$=\frac{1}{3}$AB, e BZ=BI$=\frac{2AB}{\sqrt{3}+\sqrt{15}}$,

dunque sarà sen. BZN $=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6}=$

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$=\frac{2\cos. 36°}{\sqrt{3}}$ (§. 13). Dunque l'angolo BZN è la metà di quello dell'Icosaedro. (§. 17).

Finalmente nel triangolo rettangolo DAM, si ha AD : DM : : 1 : sen. DAM, dalla quale si ricava $\text{sen. DAM} = \frac{\text{DM}}{\text{AD}}$; ma $\text{DM} = \sqrt{\frac{1}{5}\text{AB}^2}$,

$\text{AD} = \sqrt{\frac{2\text{AB}^2}{5+\sqrt{5}}}$ (§. 17.) dunque sarà sen.

$$\text{DAM} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\,\text{sen.}36^\circ} \quad (\text{ §. 13. }).$$

Dunqne l'angolo DAM, ovvero BAD è eguale alla metà dell' angolo diedro di due facce contigue del Dodecaedro. C. B. D.

PROBLEMA VIII.

Dato il raggio della sfera iscritta trovare i lati de' Poliedri regolari.

23. Si tiri ad arbitrio una retta AB (Fig. 9.), ed al punto B, si facciano gli angoli ABF, ABG, ABH, ABI, ABK, eguali rispettivamente alla metà dell' angolo diedro di due facce contigue di ciascun Poliedro. Dippiù al medesimo punto B si facciano gli altri angoli ABF', ABG', ABK', eguali rispettivamente all' angolo del triangolo equilatero, all' angolo semi-retto, ed all' angolo al centro del Decagono regolare, ossia rispettivamente di 60°, 45°, e 36°. In oltre dal punto B, si alzi la perpendicolare BM, eguale al raggio dato della sfera iscritta. Finalmente si meni per M, una retta parallela ad AB, che incontri le rette BK, BI, BH, BG, BF, ne' punti K, I, H, G, F, dai quali si abbassino sopra di AB, le perpendicolari KN, IE, HD, GC, FA, che si prolunghino fino, che incontrino le rette BK' BG', BF', ne' punti K', I', H', G', F'. Io dico che sarà AF', la metà del lato del Tetraedro, CG' la metà del lato del Cubo, DH' la metà di quello dell' Ottaedro, EI' la metà di quello dell' Icosaedro, e finalmente NK', la metà di quello del Dodecaedro.

Dimostr. Si chiami al solito $\frac{1}{2}$D, la metà

dell' angolo diedro di due facce contigue di un Poliedro, r'' il raggio BM, della sfera iscritta, b l' angolo che fa ciascuna delle rette BF', BG', BK', colla retta AB, e si dinoti con B, una delle rette BE, BN, BD, ec. e con $\frac{1}{2}$ P un lato AF', CG', DH' ec.

I triangoli GCB, HDB, KNB, ec. che hanno i lati GC=HD=IE=KN=AF, ci danno la seguente proporzione $r'' : B :: 1 : \cot.\frac{1}{2}D$, e quindi si ricava $B = r'' \cot.\frac{1}{2}D = \frac{r''}{\tan.\frac{1}{2}D}$

I triangoli F'AB, G'CB, H'DB, ec ci danno $B : \frac{1}{2}P :: 1 : \tan.\, b$, dalla quale si ha $\frac{1}{2}P = B \tan.b = \frac{B}{\cot.b}$, e sostituendo in luogo di B, il suo valore si avrà $\frac{1}{2}P = \frac{r''}{\cot.b\, \tan.\frac{1}{2}D}$;

Ora se in luogo di cot. b, di tan. $\frac{1}{2}$ D, di r'' si mettono successivamente i valori par-

ticolari che essi hanno in ciascun Poliedro, troveremo, essere AF^{1} la metà del lato del Tetraedro, CG^{1} la metà di quello del Cubo, DH^{1} la metà di quello dell'Ottaedro, EI^{1}, la metà di quello dell'Icosaedro, ed NK^{1}, la metà di quello del Dodecaedro; ma affine di dimostrare che $\frac{1}{2}P$ è in generale la metà del lato del Poliedro, basterà sostituire in luogo di r'', e di $\tan.\frac{1}{2}D$, i loro valori generali.

Onde essendo $\tan.\frac{1}{2}D = \frac{\cos.a}{\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$

(prob. 4.), sarà $\frac{1}{2}P = \frac{r''\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}{\cot.b\ \cos.a}$.

Dippiù nel problema 4.° abbiamo trovato

$r'' = \frac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$, quindi sostituendo in luogo di r'' il suo valore, avremo $\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}L$. Sicchè, ec.

PROBLEMA IX.

Dato il lato del Poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta.

24. *Soluz.* Si tiri ad arbitrio la retta AB (Fig. 10) e si faccia la medesima costruzione che si è fatta nel prob. precedente. Si alzi dal punto B la retta BN perpendicolare sopra di AB, ed eguale alla metà del lato del Poliedro, e pel punto N, si meni una parallela alla retta AB, che incontri le rette BF, BG, BK, ne' punti F, G, K, da' quali si abbassino sopra di AB, le perpendicolari FD, GC, KA, che si prolunghino finchè incontrino le rette BF', BG', BF'', BF''', BK', ne' punti F', G', F'', F''', K'. Io dico che DF' è il raggio della sfera iscritta nel Tetraedro, CG' quello della sfera iscritta nel Cubo, DF'' quello dell' iscritta nell'Ottaedro, DF''' quello dell' iscritta nell'Icosaedro, ed infine AK' quello dell' iscritta nel Dodecaedro.

Dimostr. Posto le medesime denominazioni del problema precedente, e posto $\frac{1}{2}L$ la metà del lato del Poliedro, e P uno de' lati AK', CG', DF' ec., i triangoli KAB, GCB ec. ci danno

la seguente proporzione $\frac{1}{2}$ L : B : : tan. b : 1, dalla quale si ricava $B = \frac{L}{2\tan. b} = \frac{L\cot. b}{2}$; ma i triangoli F'BD, G'BC, ec. ci danno P : B : : tan. $\frac{1}{2}$ D : 1, dalla quale si ricava $P = B \tan. \frac{1}{2} D$. Ora sostituendo in luogo di B il suo valore già trovato, avremo $P = \frac{L \cot. b \tan. \frac{1}{2} D.}{2}$ Se adesso si mettano in luogo di cot. b, e di tan. $\frac{1}{2}$ D, i valori particolari che essi hanno in ciascun Poliedro, si ricaverà DF', raggio della sfera iscritta nel Tetraedro, CG', quello della sfera iscritta nel Cubo, DF'', quello dell'iscritta nell'Ottaedro, DF''', quello dell'iscritta nell'Icosaedro, e DK', quello dell'iscritta nel Dodecaedro; ma volendo generalmente dimostrare che P è il raggio della sfera iscritta, basterà sostituire in luogo di tan. $\frac{1}{2}$ D, il suo valore, cioè

$$\frac{\cos. a}{\sqrt{-\cos(a+b)\cos)a-b)}}$$, e verrà P =.......

$$\frac{\mathrm{L}\cos. a \cot. b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$$; ma nel probl. 4°

abbiamo trovato $r'' = \frac{\mathrm{L}\cos. a \cot. b}{\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$,

dunque sarà $\mathrm{P} = r''$. C. B. T.

25. Per avere il raggio della sfera circoscritta basterebbe costruire un triangolo rettangolo, in modo che avesse per cateti il raggio della sfera iscritta, ed il raggio del cerchio circoscritto ad una faccia del Poliedro; l'ipotenusa sarebbe evidentemente il raggio della sfera circoscritta, come si è detto di sopra (§. 10) Quindi qualora ci è dato il lato del Poliedro, per trovare il raggio della sfera circoscritta, fa d' uopo prima trovare quello della sfera iscritta, e dopo costruire il sopradetto triangolo rettangolo. Questo metodo oltre di essere bastantemente lungo, non ha poi tutta l'eleganza, e semplicità che si richiede massimamente nella pratica. Quindi è necessario di dare un altro metodo, onde trovare direttamente il raggio della sfera circoscritta ad un Poliedro, qualora ci è dato il lato di esso. A tale oggetto soggiungiamo il seguente.

PROBLEMA X.

Dato il lato del Poliedro regolare, trovare il raggio della sfera circoscritta al medesimo.

26. *Soluz.* Si tiri ad arbitrio la retta AB, (Fig. 11.), e si facciano al punto B, gli angoli ABC, ABD, ABE, ABF, e ABG, eguali rispettivamente alla metà dell'angolo diedro di due facce contigue del Tetraedro, del Cubo, dell'Ottaedro, dell'Icosaedro, e del Dodecaedro. Indi dal medesimo punto B, e dall'altra parte della retta AB, riguardo agli angoli già fatti, si elevi la perpendicolare BN, e poi si facciano al punto B, e colla retta BN, gli angoli NBH, NBI NBK, eguali a $\frac{180^\circ}{m} = a$, ossia eguali rispettivamente a 36° a 45° ed a 60° come si è detto al n° 23. In seguito si tagli BM eguale alla metà del lato del Poliedro, e si tiri dal punto M la retta MK, parallela ad AB, che intersechi le rette BH, BI, BK, ne' punti H, I, K. Finalmente si abbassino le perpendicolari KS, IS', HS'', sopra della retta AB, e si prolunghino finchè incontrino le rette BC, BD, BE, BF, e BG, ne' punti C, D, E, F, e G. Io dico che SC è il raggio della sfera circoscritta al Tetraedro, SD quello della circoscritta al Cubo, S'E quello della circoscritta

all' Ottaedro, S''F quello della circoscritta all' Icosaedro, ed infine SG quello della circoscritta al Dodecaedro.

Dimostr. Si chiami P, ciascuna delle rette BS'', BS', BS, e B, ciascuna delle rette SC, SD, S'E, S''F, SG. I triangoli rettangoli KSB, IS'B, HS''B, ci danno la seguente proporzione. $\frac{1}{2}$ L : P : : 1 . tan. a, dalla quale si ricava $P=\frac{1}{2} L \tan. a$. Dippiù i triangoli CSB, DSB, ES'B, ec. ci danno.... P : B : : 1 : tan. $\frac{1}{2}$ D, dalla quale, si ricava $B=P \tan. \frac{1}{2} D$, e mettendo in luogo di P il valore trovato, sarà $B=\frac{1}{2} L \tan. a \tan. \frac{1}{2} D$. Ora se in questa equazione si mettano per tan.a, e per tan. $\frac{1}{2}$ D, i valori particolari che essi hanno in ciascun Poliedro si troverà, che SC è il raggio della sfera circoscritta al Tetraedro, SD quello della circoscritta al Cubo, S'E quello della circoscritta all' Ottaedro, S''F quello della circoscritta all'Icosaedro, ed SG, quello della circoscritta al Dodecaedro;

ma volendo dimostrare generalmente che B, è il raggio della sfera circoscritta ad un Poliedro, basterà sostituire in luogo di $\tan.\frac{1}{2}D$ il suo valore, e si troverà $B = \frac{L\text{sen}.a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}} = R''$, come si è trovato nel prob. 4°. C.B. D.

27 Essendo dato il raggio della sfera iscritta, per trovare quello della circoscritta, e viceversa sarebbe necessario di trovare prima il lato del Poliedro, ciocchè sarebbe di molto incomodo nella prattica. Quindi è indispensabile di esporre un metodo più conveniente affine di trovare direttamente il raggio della sfera circoscritta qualora ci è dato quello dell'iscritta, e di trovare quello dell'iscritta qualora quello della circoscritta ci è dato. Sia dunque il seguente problema.

PROBLEMA XI.

Dato il raggio della sfera iscritta ad un Poliedro regolare, trovare quello della sfera circoscritta.

28 *Soluz.* Si tiri ad arbitrio la retta AB, (Fig. 12.) e si faccia in B, l' angolo ABD, eguale all' angolo a ossia di $\frac{180°}{m}$. S' innalzi dal punto B, la retta BC, perpendicolare alla AB e dall' altra parte della retta AB, a riguardo dell' angolo ABD, e si faccia l' angolo $CBE = b = \frac{180°}{n}$. Si tagli $BC = r''$, e per C si tiri la CE parallela ad AB, che intersechi BE, nel punto E. Si abbassi dal punto E la perpendicolare EG, che si prolunghi finchè incontri la BD, nel punto D. Io dico che GD è il raggio della sfera circoscritta.

Dimost. Nel triangolo EGB, rettangolo in G, si ha EG : GB : : 1 : tang. GEB, ovvero r'' : GB : : 1 : tang.b, e quindi sarà $GB = r''$ tan.b. Dippiù nel triangolo rettangolo DGB, si ha BG : GD : : 1 : tang.a, e quindi sarà $GD = BG$tang.a Ora sostituendo in luogo di BG, il suo valore già trovato si avrà $GD = r''$ tang.a tang.b. Inoltre essendo $R'' = ...$

$$\frac{L\text{sen}.a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$$, ed $r^{II} =$ ....

$$\frac{L\cos.a\ \cot.b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$$ ...(§. 15.), si avrà R^{II}: r^{II} : : sen.a: cos.a cot.b, ovvero R^{II} : r^{II} : : tan.a : cot.b : : tang.a tan$b$: 1 , dalla quale si ricava $R^{II} = r^{II}$ tang.a tang.b; ma questo è il valore di GD , trovato di sopra , dunque sarà R^{II}=GD. Quindi GD è il raggio della sfera circoscritta.

PROBLEMA XII.

Dato il raggio della sfera circoscritta ad un Poliedro regolare, trovare quello della sfera iscritta.

29. *Soluz.* Si tiri la linea retta AB, (Fig. 12) e si faccia la medesima costruzione del precedente problema. Dippiù si prolunghi la CB, al di sotto del punto B, d'una quantità BF eguale al raggio della sfera circoscritta, e per F, si meni la FD, parallela ad AB, che intersechi la BD in un punto D. Si abbassi dal punto D, sopra di AB la perpendicolare DG che si prolunghi finchè incontri la BE, in un punto E. Io dico che EG, è il raggio della sfera iscritta.

Dimost. Essendo il triangolo DGB, rettangolo, si avrà DG : GB : : tang.a : 1. Dippiù il triangolo rettangolo EGB, ci da GB : GE:: tang.b : 1. Quindi moltiplicando i termini di queste due proporzioni in corrispondenza, si avrà DG : GE : : tang.a tang.b : 1 ; ma sta R^{II} : r^{II} : : tang.a tang.b : 1, dunque sarà ancora DG : GE : : R^{II} : r^{II}, ed essendo per costruzione DG$=R^{II}$, sarà ancora GE$=$ r^{II} Qnindi è vero che GE è il raggio della sfera iscritta. C. B. D.

TEOREMA III.

Le superficie dei Poliedri regolari del medesimo nome, sono tra loro come i quadrati de' loro lati.

30. *Dimost.* Sieno L, ed L' i lati di due Poliedri regolari del medesimo nome, saranno

$$S = \frac{p\,n\,L^2 \cot. b}{4}, \text{ ed } S' = \frac{p'n'\,L'^2 \cot. b}{4}.$$

le loro superficie. Quindi avremo $S : S' :: \frac{p\,n\,L^2 \cot. b}{4} : \frac{p'\,n'L'^2 \cot. b'}{4}$, ossia $S : S' ::$ $p\,n\,L^2 \cot. b : p'n'L'^2 \cot. b'$; ma essendo i Poliedri dell' istesso nome, sarà $p = p'$, $n = n'$, $b = b'$, e perciò si avrà $S : S' :: p\,n\,L^2 \cot. b : p\,nL'^2 \cot. b$, ovvero $S : S' :: L^2 : L'^2$. Dunque le superficie de' Poliedri dell' istesso nome sono tra loro come i quadrati de' loro lati. C. B.D.

31. Essendo L ed L', i lati de' Poliedri regolari del medesimo nome saranno $R'' = \ldots$

$$\frac{L \text{ sen. } a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}, \; r'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L \cos. a \cot. b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}, \text{ ed } R''' = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L \,\text{sen.}\, a}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}, \; r''' =$$

$$\frac{L \cos.\, a \cot.\, b}{2\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$$ i raggi delle sfere circoscritte, ed iscritte ne' medesimi. Quindi starà $R'' : R''' :: L : L' :: r'' : r'''$, cioè i lati de' Poliedri regolari del medesimo nome sono come i raggi delle sfere circoscritte, o delle sfere iscritte. Quindi essendo le superficie de' detti Poliedri come i quadrati de' loro lati, ne segue che saranno ancora come i quadrati de' raggi delle sfere circoscritte, o come i quadrati delle sfere iscritte; ma i quadrati de' raggi delle sfere sono come le superficie delle medesime sfere, dunque le superficie de' Poliedri del medesino nome sono come le superficie delle sfere circoscritte, o iscritte a' medesimi.

TEOREMA IV.

I volumi de' Poliedri del medesimo nome sono tra loro come i cubi de' loro lati.

32. *Dimostr.* Sieno L ed L' i lati de' Poliedri, saranno $V = \frac{pn\,L^3 \cos.a \cot.^2 b}{24\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}}$,

e $V' = \frac{p'n'L'^3 \cos.a' \cot.^2 b'}{24\sqrt{-\cos(a'+b')\cos(a'-b')}}$, i loro volumi,

e perciò starà $V : V' :: \frac{pn\,L^3 \cos.a \cot.b}{24\sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}} :$

$\frac{p'n'L'^3 \cos.a' \cot.^2 b'}{24\sqrt{-\cos(a'+b')\cos(a'-b')}}$; ma perchè i

Poliedri hanno il medesimo nome avranno ancora $p=p'$, $n=n'$, $a=a'$, $b=b'$, e quindi la proporzione diventerà $V : V' :: L^3 : L'^3$. Dunque i volumi de' Poliedri che hanno il medesimo nome sono come i Cubi de' loro lati. C. B. D.

33. Essendo $R'' : R''' :: L : L' :: r'' : r'''$, sarà ancora $R''^3 : R'''^3 :: L^3 : L'^3 :: r''^3 :$

r'''^3. Quindi essendo i volumi de' Poliedri come i Cubi de' loro lati, ne segue che saranno ancora come i Cubi de' raggi delle sfere circoscritte, o delle sfere iscritte; ma i Cubi de' raggi sono come i volumi delle sfere, dunque saranno i volumi de' Poliedri del medesimo nome come le sfere circoscritte, e come le sfere iscritte ne' medesimi.

PROBLEMA XIII.

Tra due rette date trovare due medie proporzionali.

34. *Soluz.* Sieno a, e b (Fig. 13.), le rette date, fa d' uopo trovare tra di esse due medie proporzionali. Si descriva una Parabola col parametro a, e sia ABC. Si tiri in essa l' asse AG, e si tagli la parte AF, eguale ad $\frac{1}{2}a$. Dal punto F, si alzi la perpendicolare $FC=\frac{1}{2}b$, e col centro il punto C, e col raggio CA, si descriva il cerchio ADB, che intersechi la Parabola nel punto B. Dal punto B, si abbassi sopra di AG, la perpendicolare BD, e dal punto C, la perpendicolare CH, sopra di BD. Io dico, che le rette BD, DA, sono le due medie proporzionali cercate, ossia che dovrà stare $a : BD :: BD . DA :: DA : b$.

Dimostr. Per la natura della Parabola il quadrato dell'ordinata BD, è eguale al rettangolo dell' ascissa DA, nel parametro a, dunque sarà $BD^2=a\times DA$, e quindi starà $a : BD :: BD : DA$. . . . (1) Ora nel triangolo rettangolo BCH, si ha $BH^2+HC^2=BC^2=$

$CA^2 = CF^2 + FA^2$; ma $BH = BD - CF = BD - \frac{1}{2} b$
$HC = DA - FA = DA - \frac{1}{2} a$, Dunque sostituendo sarà.... $(BD - \frac{1}{2} b)^2 + (DA - \frac{1}{2} a)^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$, e sviluppando $BD^2 - b \times BD + \frac{1}{4} b^2 + DA^2 - a \times DA + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$, ovvero trasportando $BD^2 + DA^2 = b \times BD + a \times DA$; ma $BD^2 = a \times DA$, dunque sarà $DA^2 = b \times DB$, e perciò starà $BD : DA :: DA : b$, ma sta (1) $a : BD :: BD : DA$, dunque starà ancora $a : BD :: BD : DA :: DA : b$. Quindi le due BD, e DA sono le due medie proporzionali cercate. C. B. D.

35. Siccome la costruzione della Parabola ha sempre in se una certa difficoltà, specialmente quando si richiede una certa esattezza e facilità, così nella pratica quasi sempre si preferisce il metedo pratico al metodo geometrico, ogni qualvolta si tratta di voler trovare due medie proporzionali tra due rette date. Tra i tanti metodi che vi sono onde risolvere praticamente questo problema uno de' più semplici è il seguente.

36. Sieno AB, BC, le rette date tra le quali si cerca trovare due medie proporzionali.

(Fig. 14). Si dispongono le rette AB, BC, ad angolo retto nell' estremo B, e si prolunghino verso E, e verso D. Ciò fatto si prendino due squadre LDI, FEH, e si dispongono in modo che i due lati DI, EH com-

bacino. In seguito si facciano esse muovere in maniera, che il punto D percorra la retta CBD, ed il punto E la retta ABE, e si facciano muovere fino a tanto che i lati DL, EF passino per gli estremi A, e C delle rette AB, BC. Si segnino i punti D, ed E, e si avranno le due BD, BE, medie proporzionali tra AB, e BC. In fatti i due triangoli simili ADB, DBE, ci danno AB : BD : : BD : BE, ed i due altri triangoli simili DBE, EBC, ci danno BD : BE : : BE : BC. Quindi starà AB : BD : : BD : BE : : BE : BC. Dunqne le due BD, BE, sono le due medie proporzionali cercate.

PROBLEMA XIV.

Trovare cinque rette, che abbiano tra loro la medesima ragione, che le superficie de' cinque Poliedri regolari qualora hanno li lati eguali.

37 *Soluz.* Si descriva un cerchio ACQB, (Fig. 15.) e tirato un diametro AB, si tagli AD, terza parte di esso. Dal punto D, s' innalzi sopra del diametro AB, la perpendicolare DC, e si tiri la corda AC. In oltre si taglino Ai, decima parte di AC, Am, doppia di Ai, ed An metà di AC. Dippiù si tagli BP; quinta parte di AB, e dal punto P, s' innalzi la perpendicolare PQ sopra del diametro AB, si unisca BQ. Si prolunghi QB, verso F, finchè sia BF=BO, e si trovi tra QF, FB, la media proporzionale RS. Io dico che le rette Ai, BP, Am, An, ed RS, sono tra loro come le superficie de' Poliedri regolari, qualora hanno li lati eguali.

Dimostr. Essendo (pag. 26) $L^2\sqrt{3}$ la superficie del Tetraedro, $6L^2$ quella del Cubo, $2L^2\sqrt{3}$, quella dell' Ottaedro, $5L^2\sqrt{3}$, quella dell' Icosaedro, e $3L^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$, quella del Dodecaedro, è chiaro che qualora il lato L, è lo stesso in tutti i Poliedri, le dette superficie staranno tra loro come $\sqrt{3} : 6 : 2\sqrt{3} : 5\sqrt{3} : 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}$, ovvero di-

videndo tutti i termini per 15 come $\frac{1}{5\sqrt{3}}$: $\frac{2}{5}$: $\frac{2}{5\sqrt{3}}$: $\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$. Ora essendo

$AD = \frac{1}{3} AB$, sarà $AC^2 = \frac{1}{3} AB^2$, e quindi

$AC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2AO}{\sqrt{3}}$; ma Ai è la decima parte di AC, dunque sarà $Ai = \frac{AO}{5\sqrt{3}}$, e sarà $Am = \frac{2AO}{5\sqrt{3}}$, ed $An = \frac{AO}{\sqrt{3}}$. Essendo dippiù

$BP = \frac{1}{5} AB = \frac{2}{5} AO$, sarà $BQ^2 = \frac{1}{5} AB^2 = \frac{4}{5} AO^2$, e quindi $BQ = \frac{2}{\sqrt{5}} AO$; ma $BF = BO$, dunque tutta QF, è eguale a $AO + \frac{2}{\sqrt{5}} AO = AO\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Finalmente essen-

do RS, media proporzionale tra QF, ed FB, sarà $RS^2 = QF \times FB = AO\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times AO =$ $AO^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}},\right)$ e quindi sarà $RS = AO.$ $\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$. Dunque le rette Ai, BP, Am, An, ed RS, sono come $\frac{AO}{5\sqrt{5}} : \frac{2AO}{5} : \frac{2AO}{5\sqrt{3}} :$ $\frac{AO}{\sqrt{3}} : AO\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$, ovvero come $\frac{1}{5\sqrt{5}} :$ $\frac{2}{5} : \frac{2}{5\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$; ma in questi rapporti sono le superficie de' Poliedri, dunque le rette Ai, BP, Am, An, ed RS, sono tra loro come le superficie de' Poliedri regolari qualora hanno li lati eguali. C. B. D.

PROBLEMA XV.

Trovare cinque rette che abbiano tra loro la medesima ragione che i volumi de' cinque Poliedri regolari qualora hanno li lati eguali.

38 *Soluz.* Si descriva un cerchio ACB, (Fig. 16) e tirato in esso il diametro AB, si divida l' arco AB, per metà nel punto C. Si tiri la corda AC, e si tagli Ai dodicesima parte di essa, ed Am, terza parte, ossia quatrupla di Ai. Dippiù nel cerchio ACB, si adatti perpendicolarmente al diametro AB, la corda DE, eguale al lato del pentagono iscritto in esso. Si prolunghi il diametro AB, verso F, finchè sia $BF = 7PO$, e si faccia $PR = PO$, ed $RS = \frac{5}{6}AR$. Io dico che le rette Ai, AO, Am, RS, AF, sono tra loro come i volumi de' Poliedri regolari qualora hanno li lati eguali.

Dimostr. Noi abbiamo trovato (pag. 27) che $\frac{L^3}{6\sqrt{2}}$, rappresenta il volume del Tetraedro, L^3 quello del Cubo, $\frac{L^3\sqrt{2}}{3}$ quello dell' Ottaedro, $\frac{5L^3(3+\sqrt{5})}{12}$, quello dell' Icosaedro,

ed $\frac{L^3(15+7\sqrt{5})}{4}$, quello del Dodecaedro. Quindi supponendo che il lato L, sia lo stesso in tutti i Poliedri, è chiaro che i volumi di essi staranno tra loro come $\frac{1}{6\sqrt{2}} : 1 : \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{15+5\sqrt{5}}{12} : \frac{15+7\sqrt{5}}{4}$. Ora essendo l'arco AB, diviso per metà in C, sarà la corda AC, il lato del quadrato iscritto nel cerchio, e quindi sarà $AC = AO\sqrt{2}$; ma Ai è la dodicesima parte di AC, dunque sarà $Ai = \frac{AO\sqrt{2}}{12} = \frac{AO}{6\sqrt{2}}$, ed essendo $Am = \frac{1}{3}AC$, sarà $Am = \frac{AO\sqrt{2}}{3}$. Dippiù essendo DE, il lato del pentagono regolare iscritto, sarà $DE = AO\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ (prob. 3°), e sarà $DP = \frac{1}{2} AO \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Ora essendo $OP = \sqrt{OD^2 - DP^2}$, sarà $OP = \frac{AO(1+\sqrt{5})}{4}$, e quindi $OR = 2PO = \frac{AO(1+\sqrt{5})}{2}$, $AR = AO + OR = \frac{AO(3+\sqrt{5})}{2}$; ma $RS = \frac{5}{6} AR$, dunque sarà $RS = \ldots\ldots \frac{AO(15+5\sqrt{5})}{12}$. Finalmente essendo $BF = 7PO$, sarà $BF = \frac{AO(7+7\sqrt{5})}{4}$, e tutta $AF = \frac{AO(15+7\sqrt{5})}{4}$. Quindi le rette Ai, AO, Am, RS, ed AF, staranno tra loro come $\frac{AO}{6\sqrt{2}}$: AO : $\frac{AO\sqrt{2}}{3}$: $\frac{AO(15+5\sqrt{5})}{12}$: $\frac{AO(15+7\sqrt{5})}{4}$

ovvero come $\frac{1}{6\sqrt{2}} : 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{15+5\sqrt{5}}{12}$:

$\frac{15+7\sqrt{3}}{4}$; ma in questi rapporti sono ancora i volumi de' Poliedri regolari, dunque le rette Ai, AO, Am, RS, ed AF, sono tra loro come i volumi de' Poliedri regolari qualora hanno i lati eguali. C. B. D.

PROBLEMA XVI.

Costruire un Poliedro regolare che abbia la superficie in data ragione a quella di un altro Poliedro regolare dato.

39 Sia per esempio da costruire un Ottaedro in modo, che abbia la superficie nella ragione di $m : n$ a quella di un Dodecaedro dato.

Soluz. Si trovino due rette, che sieno tra loro nella ragione delle superficie dell' Ottaedro, e del Dodecaedro qualora hanno lati eguali (prob. 14) e sieno Am, ed RS, (Fig. 15) queste rette. In ordine ad Am, RS, ed al lato L del Dodecaedro dato, si trovi la quarta proporzionale a, ed in ordine ad n, m ed L, si trovi la quarta proporzionale b. Finalmente tra a, e b si trovi la media proporzione P. Io dico che P è il lato dell' Ottaedro cercato.

Dimost. Chiamando S, ed S' le superficie dell' Ottaedro, e del Dodecaedro qualora hanno li lati eguali ad L, ed S'' quella dell' Ottaedro cercato, avremo $S : S' :: Am : RS$, ovvero $S : S' :: L : a$; ma deve stare ancora $S' : S'' :: n : m$, ovvero $S' : S'' :: L . b$ dunque moltiplicando in corrispondenza i termini di queste proporzioni, starà $S : S'' :: L^2 : ab$, ovvero $S : S'' :: L^2 : P^2$, ma poichè le superficie de' Poliedri del medesimo nome sono tra loro come i quadrati de' loro lati, ne se-

gue, che essendo S la superficie dell' Ottaedro, che ha per lato L, sarà ancora S'' la superficie dell' Ottaedro, che ha per lato P, ma con S'' abbiamo disegnata la superficie dell' Ottaedro cercato, dunque P è il lato dell' Ottaedro cercato. C. B. D.

PROBLEMA XVII.

Costruire un Poliedro regolare, che abbia il volume in data ragione a quello di un altro Poliedro regolare dato.

40 Si voglia per esempio costruire un Ottaedro, che abbia il volume nelle ragione di $m : n$ e quello di un Dodecaedro dato.

Soluz. Si trovino due rette, che sieno tra loro nella ragione de' volumi dell' Ottaedro, e del Dodecaedro, qualora hanno li lati eguali, (prob. 15), e sieno Am, AF (Fig. 16), queste rette. In ordine ad Am AF, ed al lato L *del* Dodecaedro dato si trovi la quarta proporzionale e sia a, ed in ordine ad n, m, ed a, si trovi la quarta proporzionale b. Finalmente tra L, e b si trovino due medie proporzionali (prob. 13), e sia P la prima di esse. Io dico che P è il lato dell' Ottaedro cercato.

Dimost Chiamando V, e V^{I} i volumi dell' Ottaedro, e del Dodecaedro qualora hanno il medesimo lato L, e V^{II} quello dell' Ottaedro cercato, avremo $V : V^{I} :: Am : AF$ ovvero $V : V^{I} :: L : a$, ma deve stare $V^{I} : V^{II} :: n : m$, ovvero $V^{I} : V^{II} :: a : b$, dunque moltiplicando in corrispondenza i termini di queste due proporzioni starà $V : V^{II} :: L : b$, ovvero $V : V^{II} :: L^{3} : L^{2}b$; ma essendo P, la prima delle due medie proporzionali trovate tra L, e b sarà $P^{3} = L^{2}b$, e perciò dovrà stare $V : V^{II} :: L^{3} : P^{3}$. Ora essendo

i volumi de' Poliedri regolari del medesimo nome come i Cubi de' loro lati, ne segue, che essendo V il volume dell' Ottaedro, che ha per lato L, sarà ancora V'' il volume dell' Ottaedro che ha per lato P; ma con V'' abbiamo disegnato il volume dell' Ottaedro cercato, dunque P è il lato dell' Ottaedro cercato. C. B. D.

FINE.

NOTA (a)

Essendo $\cos.(A+B)=\cos.A\cos.B-\text{sen}.A\text{sen}B$ ..... (1); ed essendo $\cos.(A-B)=$....$\cos.A\cos.B+\text{sen}.A\text{sen}.B$....(2), addizionando sarà $\cos.(A+B)+\cos.(A-B)=2\cos.A\cos.B$, e facendo $A+B=2a$, ed $A-B=2b$, si avrà $\cos.2a+\cos.2b=2\cos.(a+b)\cos.(a-b)$....(3). Dippiù facendo $A=B$, l'equazione (1) diventera $\cos2A=\cos.^2A-\text{sen}.^2A$, e mettendo successivamente in luogo di $\cos^2A$, e di $\text{sen}.^2A$, i loro valori rispettivi $1-\text{sen}.^2A$, ed $1-\cos.^2A$, si avranno queste due equazioni $\cos.2A=1-2\text{sen}.^2A$, e $\cos.2A=2\cos.^2A-1$, dalle quali si ricava

$\text{sen}^2A=\frac{1-\cos.2A}{2}$, e $\cos.^2A=\frac{1+\cos.2A}{2}$. Ora

essendo $\text{tang}.\frac{1}{2}D=\frac{\cos.a}{\sqrt{\text{sen}^2b-\cos^2a}}$, ne segue, che mettendo in luogo di sen^2b, e di $\cos^2a$ i loro valori $\frac{1-\cos2b}{2}$, ed $\frac{1+\cos.2a}{2}$, si avrà

$$\text{tang}.\frac{1}{2}D=\frac{\cos.a}{\sqrt{-\frac{1}{2}(\cos.2b+\cos.2a)}}$$; ma..(3)

$\cos.2b+\cos.2a=2\cos.(a+b)\cos.(a-b)$ dunque

sostituendo si avrà tang. $\frac{1}{2}$ D=

$$\frac{\cos.a}{\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}$$

NOTA (*b*)

Essendo $PM=\frac{L}{2\text{sen}.b}$, ed essendo $OP=$

$$\frac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}=\frac{L\cos.a\cot.b}{2\sqrt{\text{sen.}^2b-\text{sen.}^2a}},$$

sarà $PM^2+OP^2=\frac{L^2}{4\text{sen.}^2b}+\frac{L^2\cos.^2a\cot.^2b}{4(\text{sen.}^2b-\cos.^2a)}$, e

mettendo in luogo di $\cot^2b$, il suo valore

$\frac{\cos^2b}{\text{sen}^2b}$, si avrà $PM^2+OP^2=\frac{L^2}{4\text{sen.}^2b}$ +

$$\frac{L^2\cos.^2 a\cos.^2 b}{4\text{sen.}^2 b(\text{sen.}^2 b\text{-}\cos.^2 a)} =$$

$$\frac{L^2(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a)+L^2\cos.^2 a\cos.^2 b}{4\text{sen.}^2 b(\text{sen}^2 b\text{--}\cos^2 a)} =$$

$$\frac{L^2(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a+\cos.^2 a\cos.^2 b)}{4\text{sen}^2 b(\text{sen}^2 b\text{--}\cos^2 a)} =$$

$$\frac{L^2(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a(1\text{--}\cos.^2 b)}{4\text{sen.}^2(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a)} =$$

$$\frac{L^2(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a\,\text{sen.}^2 b)}{4\text{sen.}^2 b(\text{sen}^2 b\text{--}\cos.^2 a)} =$$

$$\frac{L^2\text{sen.}^2 b(1\text{--}\cos.^2 a)}{4\text{sen.}^2 b(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos^2 a}$$

$$\frac{L^2(1\text{--}\cos^2 a)}{4(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a)} = \frac{L^2\text{sen.}^2 a}{4(\text{sen.}^2 b\text{--}\cos.^2 a)},$$ e quindi

sarà $\sqrt{PM^2+OP^2}=OM=\frac{L\,sen.a}{2\sqrt{sen.^2 b-cos.^2 a}}=$

$$\frac{L\cos.a}{2\sqrt{-\cos.(a+b)\cos.(a-b)}}.$$

Pag.	Ver.	Errori	Correzioni
8.	9.	prattica	pratica
12.	5. da piede	iscritto	circoscritto
28.	13.	volore	valore
41.	6. da piede	prattica	pratica
44.	7. da piede	prattica	pratica

Napoli 9 Febbrajo 1826.

Presidenza della Giunta per la Pubblica Istruzione.

Vista la dimanda del Tipografo Raffaello di Napoli, con la quale chiede di voler stampare una *Memoria sopra i cinque Poliedri regolari di Tommaso Mandoj.*

Visto il favorevole parere del Regio Revisore sig. D. Gaetano Parroco Giannattasio;

Si permette, che l' indicata Memoria si stampi però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all' Originale approvato.

Il Presidente
M. Colangelo.

Pel Segr. Gen. e membro della Giunta

L' aggiunto
Antonio Coppola.

Fig. 2.
D
T
A
C
E
B
F
E
A
F
D
H
I
I
Fig. 13.
A
F
D
G
M
D
P
N
n
s
t
O
A
B
Fig. 5.
Fig. 14.
H
E
I
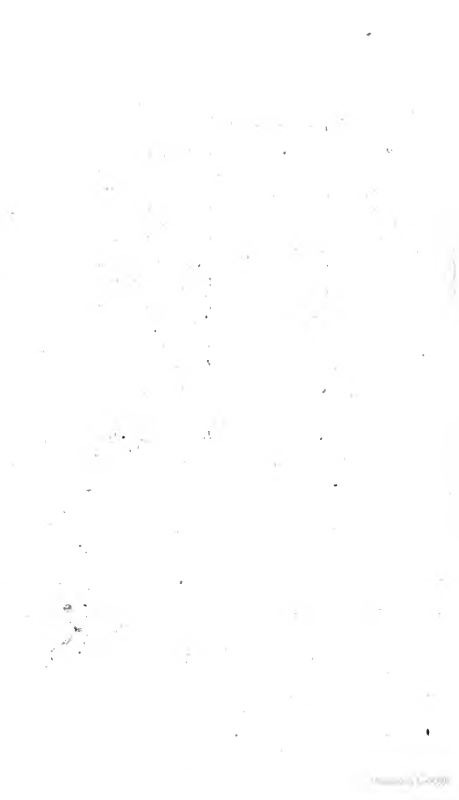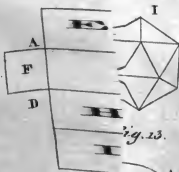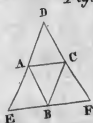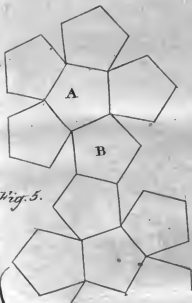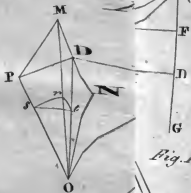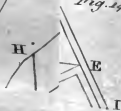
Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 10.

dri regolari